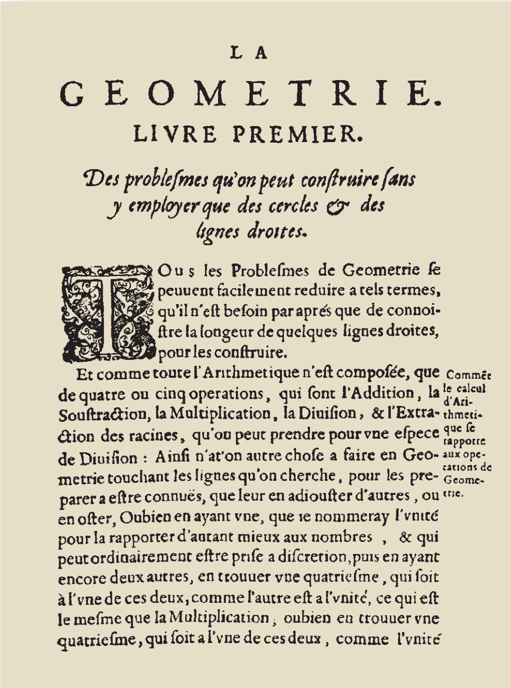
גאומטרייה ושפה

מאת **אהוד הרושובסקי**

גאומטרייה

הגאומטרייה היא אחד הענפים המרכזיים של המתמטיקה העכשווית והייתה כזו כמעט בכל ההיסטוריה הידועה שלה. היוונים במאה החמישית לפנה"ס ראו בה תורה עתיקה שהגיעה אליהם ממצרים. הם צירפו לה את השיטה הדדוקטיבית ובכך קבעו את אופייה של המתמטיקה כולה עד היום. שמונה מתוך שלושה־עשר ספרי "היסודות" של אאוקלידס (המאה השלישית לפנה"ס) עוסקים בגאומטרייה. הספר הראשון נחתם בהוכחת משפט פיתגורס על משולשים ישרי זווית, והאחרון – בבניית חמשת הגופים האפלטוניים וההוכחה שאין פאונים משוכללים אחרים בשלושה ממדים. הקשר בין הגאומטרייה לאלגברה הובהר עם הופעתה של ה"גאומטרייה" של דקארט ב־1633, שהייתה לאחת מאבני היסוד של המהפכה המדעית. דקארט הראה שפעולות האלגברה – חיבור, כפל, חיסור וחילוק – והפעולות הגאומטריות כגון מציאת נקודת החיתוך של שני ישרים, שני פנים הם של דבר אחד. התאמה זו מתחילה בתיאור נקודה במישור באמצעות זוג מספרים (x,y); קבוצת הפתרונות של משוואה לינֵארית המקשרת בין המשתנים, כגון $y=2x+1$, תהיה אפוא ישר. משוואות הכוללות כפל של המשתנים מתארות עקומים. לדוגמה, המשוואה $x^2+y^2=1$ מתארת את קבוצת הנקודות שמרחקן מהראשית הוא יחידה אחת, כלומר את המעגל (וזהו משפט פיתגורס!). מנקודת מבט זו הגאומטרייה האאוקלידית דנה באותן צורות במרחב ובמישור שמתארות משוואות ואי־שוויונות מהמעלה הראשונה והשנייה. דקארט הרחיב את היריעה למשוואות ממעלה שלישית ומעלה.

בתחילת המאה התשע־עשרה גילו גאוס, בוליאי ולובאצ'בסקי את הגאומטרייה הלא־אאוקלידית הראשונה, היא הגאומטרייה ההיפרבולית, שבה ישרים רבים עוברים דרך נקודה אחת, וכולם מקבילים לישר נתון. בגאומטרייה של אאוקלידס ייתכן רק מקביל אחד כזה. באמצע המאה החלה המתמטיקה לדון במפורש במרחבים מממד גבוה, מעבר לשלושה ממדים. ב־1854 דיבר ברנרד רימאן על גאומטריות המשתנות ברציפות מהיפרבוליות לאאוקלידיות ומעבר לכך. כחצי מאה לאחר מכן הייתה תורה זו לבסיס קונצפטואלי לתורת היחסות הכללית. רימאן הבין גם את העצמה שבהחלת מושג המרחב על קבוצות אובייקטים בעלי מבנה פנימי, כמו "מרחב העקומים", שבו כל נקודה מייצגת עקום במרחב אחר.


LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commēt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

שער לגאומטרייה של דקארט, 1633 (wikicommons)


פיתגורס


דקארט

לא רק הגאומטרייה האאוקלידית איבדה את בלעדיותה, אלא אף מערכת המספרים הממשיים שעליה היא נשענת, מערכת שבה פעולות חיבור, כפל, חילוק וחיסור המקיימות את חוקי האלגברה הרגילים נקראת "שדה". המספרים הנקראים "ממשיים" (או לפחות החיוביים) מופיעים אצל אאוקלידס, תחילה כאורכים של קטעים; בתורת המספרים היוונית משחקים המספרים הרציונליים (שברים של שלמים) ושדות אחרים המוכלים בממשיים תפקיד חשוב. ההכללה הראשונה מעבר לכך הייתה "שדה המספרים המרוכבים". באלגברה של המאה השש־עשרה הורגש הצורך בשורשים ריבועיים של מספרים שליליים, הם המספרים ה"דמיוניים", ועמו האפשרות לעבוד עם צירופים "מרוכבים" של מספרים דמיוניים כאלה ומספרים ממשיים. במאה התשע־עשרה התברר שאפשר לראות בשדה המרוכבים מישור שבו המספרים הממשיים מסודרים על ישר והמספרים הדמיוניים מסודרים על ישר ניצב לו – ציר הדמיוניים. למרות הגדרתה המסובכת יותר של הגאומטרייה המרוכבת חוקי העומק שלה פשוטים מאלו של הגאומטרייה הממשית, והיא הפכה למרכזית במתמטיקה.

ההפשטה בגאומטרייה העצימה לקראת ובמשך המאה העשרים. דוגמה אחת היא הגאומטרייה מעל "שדות סופיים", שמקורה בתורת המספרים הטבעיים. מספרים טבעיים אפשר להכפילם או לחברם ולקבל מספר טבעי חדש. אך לא תמיד יהיה אפשר לחלק או לחסר בתוך מערכת זו (למשל חילוק 3 ב־2). אולם אם נראה במספר טבעי מונה ימים החל מיום נתון, ונתעניין רק ביום השבוע – כלומר נתעלם מכפולות של שבע ונזהה את 8 עם 1 וכו' – הרי אז אפשר לחלק ולחסר וכל החוקים הבסיסיים מתקיימים. לדוגמה 3/2 במקרה זה שווה 5 כי 5+5=10 ו־10 שקול ל־3. מבנה כזה מכונה "השדה הסופי מסדר 7". שדה דומה קיים לכל מספר ראשוני. במאה העשרים הובילו ויי (Weil) וגרותנדיק מהלך רב־דמיון שהביא להחלת הגאומטרייה האלגברית כולה על שדות סופיים. התפתחות זו זכתה לשימושים רבים במתמטיקה, ולקראת המאה העשרים ואחת גם במדעי המחשב, בקריפטוגרפיה ובתקשורת.

למרות תהליך ההפשטה (שממשיך ביתר שאת כעת דווקא בהקשר של קשרים לפיזיקה) לא אבדה הקוהרנטיות המאפיינת את הגאומטרייה ולא התחושה המרחבית והוויזואלית המלווה אותה. קחו לדוגמה את המשפט הנקרא על שם בזו (Bézout). דרך שתי נקודות עובר רק קו ישר אחד, אומרת האקסיומה של אאוקלידס. בהיפוך נקודת


בזו


ג'ורג' בול

המבט נובע ששני ישרים נחתכים בנקודה אחת לכל היותר. ישר יפגוש מעגל בשתי נקודות (לכל היותר), ואילו מעגל והיפרבולה יוכלו להיפגש בארבע נקודות. משפט בזו טוען כללית יותר שמספר נקודות החיתוך של שני עקומים במישור יהיה לכל היותר מכפלת מעלות המשוואות המתארות אותם. לשלושה משטחים במרחב תלת־ממדי, המתוארים על ידי משוואות ממעלות m,n,p, יהיו לכל היותר mnp נקודות מבודדות במשותף וכן הלאה בממדים גבוהים יותר. את עקרון ההוכחה מצא פונסלה בהיותו בשבי הרוסי לאחר מפלת צבא נפוליון. מחוסר ספרים נאלץ, לדבריו, להמציא מחדש את הגאומטרייה. קל למצוא את מספר נקודות החיתוך של שני עקומים מנוונים שכל אחד מהם הוא פשוט איחוד של ישרים. הרעיון במקרה הכללי הוא להזיז ברציפות את אחד העקומים עד שמגיעים למצב הפשוט יותר, למשל להניע היפרבולה בתוך מרחב ההיפרבולות באופן שתשאף להיפרבולה מנוונת, כלומר איחוד של שני ישרים. מספר נקודות החיתוך לא ישתנה בעת הזזה רציפה כזו, ואף לא במעבר לגבול. כדי להצדיק סדרת טענות זו היה צורך בפיתוח כלים רבים: מספרים מרוכבים וגאומטרייה פרויקטיבית הם רק ההתחלה. יש להגדיר את מספר נקודות החיתוך גם במצבים של השקה או ניוון. בעיות אלה נפתרו במלואן רק באמצע המאה העשרים.

השפה המתמטית

האם ניתן להגדיר את השפה המתמטית עצמה כאובייקט מתמטי הניתן להבנה באמצעות המתמטיקה?

סיפור זה מתחיל אף הוא ביוון של המאה הרביעית לפנה"ס, אך התקדם ממש מעבר לאריסטו רק במאה התשע־עשרה. כמאה שנה לאחר הפרינקיפיה לניוטון (1687) התקיימה המתמטיקה ללא הגדרות של מושגיה הבסיסיים. הדור שנולד עם המהפכה

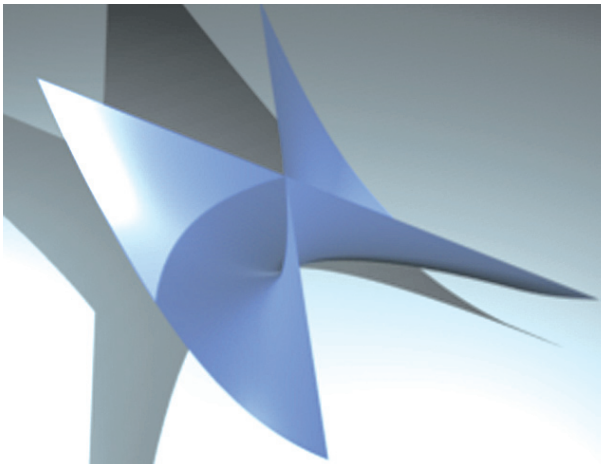
הצרפתית חש צורך בהגדרה למושג הגבול או הרציפות. אחרי ניסיונות חוזרים של מתמטיקאים כמו קושי ובולזאנו ניסח ויירשטראס ב־1850 את ההגדרה שנלמדת עד היום. המאמץ הקונצפטואלי העצום שהושקע בהבהרת המושגים המתמטיים הוביל בסופו של דבר להבהרת טבע השפה המתמטית בכלל. נתבונן בהגדרת הרציפות לפונקצייה f. הקשר בינה לבין המושג האינטואיטיבי של רציפות איננו שקוף כלל ודורש הסבר משמעותי שלא נחזור עליו כאן; נשים לב רק לשפה שבה ההגדרה מנוסחת:

> הגדרת רציפות של פונקצייה:
> לכל נקודה x בתחום הפונקצייה f ולכל מספר ממשי $e>0$ קיים $d>0$, כך שלכל נקודה y, אם המרחק בין x ל־y קטן מ־d, אז המרחק בין fx לבין fy קטן מ־e.

יש בפסוק זה מונחי רקע: "מספר", "פונקצייה", "מרחק". נקבל אותם כחלק משפת בסיס נתונה. המושג המורכב יותר של רציפות מוגדר כולו בעזרת מילים לוגיות. המילים "אם... אז" וכמוהן "לא", "ו־" ו"או" נקראות בוליאניות על שם ג'ורג' בול (George Boole), שניתח את משמעותן באמצע המאה התשע־עשרה, ניתוח שכידוע היה לבסיסי בתכנון מכונות חישוב. ברובד הלשוני שיצרו מילים אלה אין כל התייחסות לאינסוף, ואין אפשרות ליצור מושגים חדשים ממש אלא רק צירופים של מושגים ישנים. מלבדו מופיעות עוד שתי מילים: "לכל" ו"קיים". מילים אלה נקראות "כמתים" ומתייחסות לאינסוף איברים d או e פוטנציאליים. הן גם מכניסות דינמיקה לפסוק: "אחרי שניתן d יש לחפש e כך ש..."

הודות לעבודתם של דדקינד, פרגה, ראסל ואחרים התבהר כוחה העצום של שפה הבנויה על מונחים לוגיים ספורים אלה. אפשר להגדיר בעזרתם גם את מושגי המספר והפונקצייה על בסיס מונחי רקע פשוטים יותר. בסופו של דבר אפשר להעמיד את המתמטיקה כולה – את כל שפת הטבע, בפי גלילאו – על בסיס מושג אחד ויחיד: שייכות איבר לקבוצה.

הנה דוגמה בשפת בסיס פשוטה יותר השואפת לתאר את הגאומטרייה. נקבל כשפת בסיס את המשוואות האלגבריות של דקארט. הנקודות על "מטריית ויטני" (Whitney) באיור ב מקיימות את המשוואה $x^2=y^2z$, אלא שזו כוללת גם את ציר ה־z השלילי; המשטח באיור מתואר אפוא באמצעות הנוסחה $x^2=y^2z$ (ולא "$x=0$ ו־$y=0$ ו־$z<0$"). הצל שנראה בציור הוא קבוצת הנקודות שבינן לבין מקור האור קיימת נקודה במשטח החוסמת את קרן האור. על כן אפשר להגדירו בעזרת כמת הקיום שבשפה: בהנחה למשל שהאור מגיע אנכית מלמעלה, נקודה (x,y) במישור היא נקודת צל אם קיים $z>0$ כך ש־$x^2=y^2z$. נמשיך: כדי לתאר את השפה של הצל (העקומים הגובלים אותו) נוכל לומר: נקודה (x,y) בצל היא נקודת שפה אם לכל $e>0$ קיימת נקודה במישור זה שאיננה בצל, ושמרחקה מ־(x,y) קטן מ־e. בדומה לזה נוכל להגדיר את המרחק שבין נקודה לעקום, או בין שני עקומים. כללית, בניות וטענות גאומטריות בממד נתון והמערבות צורות ממעלה חסומה, ניתנות לביטוי בשפה זו.



המטרייה של ויטני (wikicommons/Claudio Rocchini)

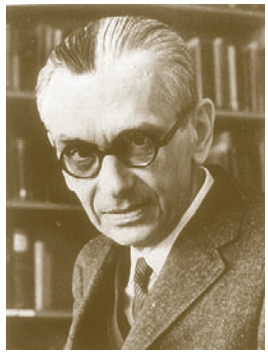
שלמות

השפה הפורמלית לא תייצג נאמנה את משמעות המתמטיקה ואת זרימת רעיונותיה; עליהם אין אנו יודעים לדבר בדיוק רב יותר מאשר על רעיונות במוזיקה או בפיזיקה. המהלך הקונצפטואלי שמסתיים בהגדרה חדשה – כמו זו של הרציפות – הוא דוגמה פשוטה לכך. התפתחות זו חשובה לעתים יותר מההוכחות שהיא מאפשרת, אך מטבע הדברים היא נעלמת בייצוג הפורמלי, שמתחיל רק לאחר שההגדרה נוסחה.

אך אספקט אחד של המתמטיקה מיוצג בשפה זו בצורה מושלמת: תקפותם של היסקים. היסק של פסוק מקבוצת הנחות תקף מתמטית אם הוא נכון בכל עולם אפשרי, ללא

תלות בפירושן של מילות שפת הבסיס. "משפט השלמות" מאפיין את ההיסקים התקפים בצורה לשונית:

> משפט השלמות (קורט גדל [Kurt Gödel, 1929]): כל היסק תקף מתקבל על ידי סדרה סופית של היסקים מסוג קונקרטי, הניתן לתיאור תחבירי פשוט.


קורט גדל

במשפט זה הביא גדל לסיום מהלך ארוך שהבהיר את טבע הקשרים הלוגיים בין פסוקים שונים בשפה המתמטית: מתי שתי הגדרות הן שקולות? כיצד נובע פסוק אחד מאחר? שפת המתמטיקה הייתה לשקופה לחלוטין. אין מדע אחר המבין בדיוק כזה את תנאי הקבלה שלו לעובדות חדשות.

כפי שראינו קודם, את המשפטים הגאומטריים של אאוקלידס אפשר לנסח בשפה המבוססת על סימני האלגברה – שוויון ואי־שוויון – והנבנית על ידי קשרים בוליאניים וכמתים. זה נכון גם כשמדובר בגאומטרייה ההיפרבולית וגם בממדים גבוהים ובמעלות גבוהות. משפט השלמות של גדל מסביר בדיוק כיצד פסוק אחד כזה נובע מאחרים. אולם האם קיים אלגוריתם המכריע מתי פסוק מסוים נכון בגאומטרייה נתונה, ומתי אינו נכון? האם קיימת מערכת אקסיומות שלמה לאותו חלק בגאומטרייה הניתן לניסוח בשפה זו, שממנה נובע כל משפט אמִתי? טארסקי גילה בשנות השלושים שהתשובה לאלה חיובית. ודאי שיצירתיות גדולה נדרשה בפריצת הדרך של אפולוניוס או לובאצ'בסקי אלא שמספר סופי של פריצות דרך כאלה מספיק; משם והלאה אמתותו של פסוק כלשהו ניתנת להכרעה שיטתית. יתר על כן, התורה מאפשרת מה שנקרא "חילוץ כמתים": כל בנייה או טענה שאפשר להביע בשפה זו בעזרת כמתים, כמו הדוגמאות לעיל, אפשר לרשמן בעזרת משוואות, אי־משוואות וקשרים בוליאניים בלבד. אין לאינסוף היכן להסתתר.

ההוכחה מתבססת על עצם הבהרת טבעה של השפה: משמעותו של פסוק ניתנת להגדרה אינדוקטיבית. כמת יחיד שואל רק על קיום פתרונות לפולינום בקטע מסוים, ואפשר לענות על כך בשיטתיות. יכולת ההבעה המרשימה של השפה נובעת משילוב כמה כמתים, אך אם נדע להחליף כמת אחד בביטוי חסר כמתים, נוכל "לחלץ" את כל הכמתים בזה אחר זה. איתמר פיטובסקי הראה במאמרו היפה על גבולות החישוב וגבולות ההצרנה שכבר הגאומטרייה של דקארט מכילה את ניצני רעיון חילוץ הכמתים ומשהו דומה לטענת השלמות הנובעת מכך. כדי לפתח זאת היה צורך בתובנות מדויקות בקשר לשפה, ששיאן היה משפט השלמות של גדל.

במבט לאחור ניתן לראות את הקשר ההדוק הספציפי בין הלוגיקה לגאומטרייה. הלוגיקה בתורת אאוקלידס לא הגיעה לרמת החומרה המודרנית, אך כמעט כך, ונוצרה ציפייה ברורה שכל טענה גאומטרית ניתנת להוכחה או להפרכה על בסיס האקסיומות. אפילו סופה של הגאומטרייה האאוקלידית כגאומטרייה היחידה במאה התשע־עשרה נבע במידה רבה מתחושה זו: כישלון הניסיונות להוכיח את אקסיומת המקבילים הוא שהוביל לגילוי הגאומטרייה ההיפרבולית שבה אין היא נכונה.

למשפטי השלמות של גדל ושל טארסקי יש ערך היסטורי ומתודולוגי. אבל מפתיע שיש להם גם שימושים פנים־גאומטריים. נתבונן שוב בצל שבאיור ב. בצד ימין יש לו צורת כנף, שהופכת לחדה מאוד, כלומר היא נתחמת על ידי שני עקומים השואפים זה לזה. באיזו מהירות? אנשי משוואות דיפרנציאליות חלקיות נדרשו לגרסה כללית של שאלה זו ושאלות דומות בשנות הארבעים. התשובה באה דרך משפטו של טארסקי. ראינו שאת העקומים הללו נוכל להגדיר בשפה הפורמלית, וכן את המרחק מנקודה על אחד העקומים אל העקום השני. כעת, על פי חילוץ הכמתים של טארסקי, כל פונקצייה גדירה היא פונקצייה אלגברית, כלומר מתוארת על ידי פולינום בשני משתנים. מכאן קל לראות שקצב ההתקרבות גם הוא חסום על ידי פולינום. ובכן, בעיה גאומטרית מובהקת נפתרה כאן בכלים בלשניים: בסופו של דבר – באמצעות אינדוקצייה בפסוק המתאר את הגאומטרייה(!) שימושים רבים מסוג זה של משפט טארסקי ומשפטים דומים למערכות אחרות ידועים היום.

שלמות ואי־שלמות

הייתכן שלמתמטיקה כולה יש מערכת אקסיומות שלמה כמו לגאומטרייה האלמנטרית? שפת המתמטיקה הרי הוצרנה, וראסל ווייטהד הציעו מערכת אקסיומטית המתאימה לפיתוח האנליזה. בהקשר זה תשובתו של גדל הייתה דווקא שלילית. "משפט אי־השלמות" של גדל (1930) מראה

שמערכת האקסיומות של ראסל ווייטהד איננה שלמה, ושום מערכת דומה לא תוכל להיות שלמה. יתר על כן, גם לא תיתכן מערכת אקסיומטית שלמה המתארת חיבור וכפל של מספרים טבעיים אם נאפשר שימוש בכמתים.

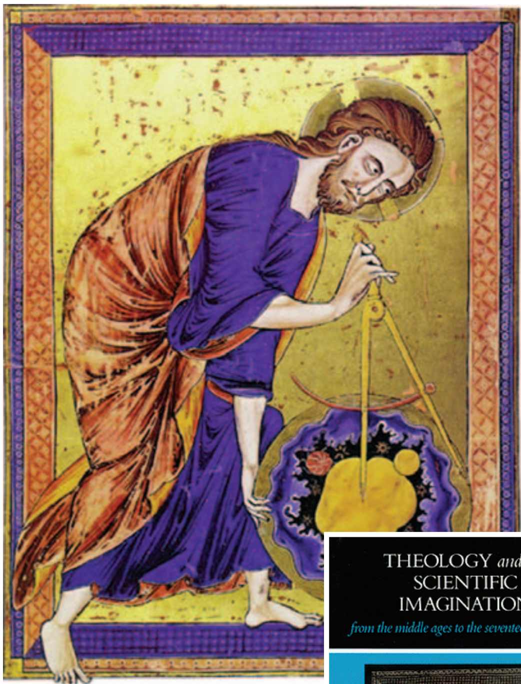
הסיבה קשורה למושג ה"פירוש". מושגים לשוניים ניתנים לקידוד ולהצגה מספרית. פסוקים שכפשוטם מדברים על מספרים טבעיים יכולים להיות קידוד של כמעט כל דבר. המצב אפוא שונה בתכלית ממה שטארסקי הראה כמה שנים לאחר מכן בגאומטרייה.

משפטי אי־השלמות של גדל תאמו היטב את רוח המאה העשרים; מגבלות הרֵאליזם, חשיבות השפה והמתבונן ואי־הוודאות הופיעו אפילו במתמטיקה וזכו להד תרבותי רב עצמה. כיצד מתיישבים עמם המשפטים הידועים פחות, של שלמות מערכת ההיסק הלוגי־מתמטי בכלל ושל מערכת עשירה של גאומטרייה בפרט? אצטט מספרו של עמוס פונקנשטיין *Theology and the Scientific Imagination* (פרינסטון, 1986):

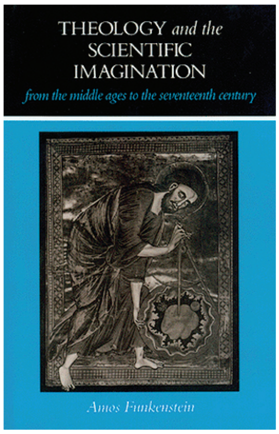
> "...אפשר לקרוא את תולדות המתמטיקה כביאור מתמשך למשפט אי־השלמות. אי־היכולת לפתור בעיות בתוכו של תחום נתון הובילה פעם אחר פעם ליצירתם של שדות חדשים (...)"

התפיסה השגורה של משפט גדל (וגם זו של גדל עצמו) היא שלילית: מערכת פורמלית המייצגת את המתמטיקה כולה לא תוכל להיות שלמה. פונקנשטיין הופך את המשפט על פיו: מערכת שלמה איננה יכולה לייצג את כל המתמטיקה. לכן (לקריאתי) כאשר מערכת כזו מובנת היטב, היא יוצרת בסיס להעלאת שאלות חדשות החורגות ממנה ושבבוא הזמן ייסגרו אולי במערכת שלמה אחרת. במקום משפט מגביל יש כאן הסבר לתהליך היסטורי יצירתי, הסבר המותיר מקום לתופעת השלמות במתמטיקה לא פחות מלתופעת אי־השלמות.

קחו לדוגמה את הגאומטרייה של שדות סופיים. לשדה המרוכב יש סימטרייה המחליפה בין שני השורשים של מספר דמיוני ומשמרת את כל הפעולות האלגבריות: גאומטרית, חצי המישור העליון משתקף אל התחתון הזהה לו דרך הישר הממשי, שנשאר קבוע. גלואה (Galois) צייר ב־1830 תמונה דומה של שדות המספרים מודולו ראשוני p. גם לשדה זה יש הרחבות המתקבלות על ידי הוספת שורשים "דמיוניים" לפולינומים, וגם להן יש סימטרייה שנקודות



God Using Geometry to Create the World



השבת שלה הן בדיוק השדה המקורי. אך כאן הסימטרייה עצמה ניתנת על ידי פעולה אלגברית: חזקת p. כ־110 שנים אחר כך הוכיח אנדרה ויי (Weil) משפט הנקרא "השערת רימאן לשדות סופיים": כל משוואה אלגברית בשני משתנים ניתנת לפתרון בכל שדה סופי גדול דיו, אלא אם הסימטרייה של גלואה מונעת זאת בצורה פשוטה. הנקודה הזאת היא לוגית: ב־1968 הראה ג'יימס אקס (James Ax) ששתי עבודות אלה – של גלואה ושל ויי – מספקות יחד אקסיומטיזציה מלאה של שדות סופיים ומביאות להכרעת ערך האמת של כל פסוק. ובכן גם כאן, לאחר שחרגה מהעולם הממשי והמרוכב המוכר התפתחה הגאומטרייה בסביבתה, אם לא בחובה, של מערכת שלמה, תחילה בלי לדעת זאת.

לאחר מכן התגלו תורות שלמות רבות השולטות בחלקים משמעותיים אחרים של הגאומטרייה. אחד מתפקידיה של תורת המודלים הוא למצוא תורות חדשות כאלה המסבירות את הקוהרנטיות ואת ההצלחה של תחומים בגאומטרייה ובמתמטיקה בכלל. איננו יודעים אם קיימת מערכת סגורה המשקפת בצורה כלשהי את תורת המספרים הקלאסית.

אם היא קיימת, משפט גדל מראה שגבולותיה עדינים. המחקר העכשווי מתמקד כמובן תמיד בשאלות שאינן נופלות למערכות ידועות, למשל בעיות בממדים או מעלות השואפים לאינסוף.

שדות פונקצייה ושדות סופיים

כמו מספרים, שאפשר לחברם, לחסרם ולהכפילם – כך גם פונקציות שערכיהן מספרים. בהקשרים מסוימים אפשר לחלק גם פונקצייה אחת באחרת; מתקבל שדה. דוגמה פשוטה היא "שדה הפונקציות הרציונליות", כלומר מנות של שני פולינומים במשתנה נתון t. האנלוגיה בין מספרים לבין פונקציות הייתה ידועה היטב במאה השבע־עשרה, אך גם בעניין זה הגיעה הגאומטריזציה המלאה במאה העשרים.

אם נחשוב על המשתנה t כמציין נקודת זמן, הרי שהזזה בזמן היא סימטרייה של השדה: הפונקצייה $f(t)$ עוברת אל $f(t+1)$ תוך שימור הפעולות האלגבריות. נרחיב את שפת השדות כדי להתייחס לסימטרייה כזו. משוואה בשפה חדשה זו נקראת משוואת הפרש. משוואות כאלה מופיעות, בין השאר, בביולוגיה של אוכלוסיות. לדוגמה "משוואת הארנבים" של פיבונאצ'י משנת 1202: נניח שארנבת ממליטה שני שפנים כל חודש, החל מגיל חודשיים (ונתעלם ממוות); מספר הצאצאים לאחר t חודשים יקיים אפוא את המשוואה $f(t)=f(t-1)+f(t-2)$. משוואה זו היא "מסדר 2", שכן גודל האוכלוסייה בחודש הנוכחי תלוי בגודלה לפני חודש ולפני חודשיים: קיים זיכרון של חודשיים לאחור. ברור שאם נדע את ערך f בשני חודשים עוקבים, תיקבע הסדרה בכל זמן. הסדרה $f(t)$ נקבעת באופן מלא על ידי שני ערכים עוקבים, ואומרים שמרחב הפתרונות הוא ממד 2. כללית, מספר הפרמטרים לקביעת הפתרון נקרא הממד.

המתמטיקאי אברהם רובינסון העלה רעיונות שהובילו לאקסיומטיזציה של שדות ההפרש הכלליים ביותר. אם מגבילים את המבט אל נקודות השבת של הסימטרייה, מתקבלות בדיוק האקסיומות שרשם אקס עבור השדות הסופיים. עובדה זו הופיעה בניסוח אחר, הסתברותי, בעבודת הדוקטור שכתב משה ירדן ב־1969 (בהנחיית הלל פירסטנברג). אם כן, האם הסימטריות של גלואה מקבילות באותה צורה לסימטרייה של שדה ההפרש הכללי, מעבר לנקודות השבת? הסימן $f(t+1)$ יתפרש בהקבלה זו דווקא כחזקה f^p.

באחת מעבודותיי הראיתי שאכן מתקיימים בדיוק אותם חוקים, עד גבול ההבעה בשפה, בשדות הפונקצייה ובשדות גלואה. לכל מערכת משוואות הפרש שיש לה פתרון בשדה כלשהו יש פתרון גם בשדה גלואה עם סימטרייה מהצורה x^p. שדה הגלואה הוא סופי, וממד מתפרש בו כסדר גודל: אם מרחב הפתרונות הוא n – ממדי, מספר הפתרונות בשדה גלואה מתאים יהיה (בסדר גודל) כ־p^n.

מסקנה בלתי צפויה ממשפט זה קשורה לשאלה של קרל גוסטב יעקובי. ראינו שלמשוואה יחידה המביטה שתי יחידות זמן אחורה יש מרחב פתרונות דו־ממדי. אך בדרך כלל דרושות כמה משוואות בכמה משתנים. באוכלוסייה משותפת של אריות וכבשים בעמק ברור שמספר הכבשים הנוכחי תלוי במספרם בזמנים קודמים, אך גם במספר האריות. נקבל שתי משוואות הפרש לזוג פונקציות (האחת – מספר הכבשים; השנייה – מספר האריות, בזמן נתון). כאן נזדקק לטבלה כדי לתאר לאיזה מרחק בעבר מסתכלת משוואה מסוימת בנוגע לאוכלוסייה נתונה. למשל, אם המצב היום תלוי במספר הכבשים אתמול ושלשום ובמספר האריות אתמול, רושמים זאת בטבלה כך $\left(\begin{smallmatrix}2&1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$. נשאלת השאלה, בהינתן טבלה כזו של סדרים, מהו ממד מרחב הפתרונות שעלינו לצפות לו. התשובה מופיעה במאמר מעיזבונו של יעקובי, שפורסם אחרי מותו. יעקובי עסק במשוואות דיפרנציאליות, הגרסה הרציפה של משוואות הפרש, שם מופיעים מושגים מקבילים של סדר, הסתכלות אחורה וממד. יעקובי ניסח את הפתרון שכשלעצמו איננו פשוט (התשובה נראית כדטרמיננטה שבה כפל מוחלף בחיבור), אך ללא הוכחה מלאה. הבעיה נחשבה פתוחה במאה העשרים הן בעניין משוואות דיפרנציאליות והן בעניין משוואות הפרש.

מה ייתן התרגום שהזכרנו לשדות גלואה? משוואת הפרש מסדר n הופכת לפולינום ממעלה כ־p^n, ממד מיתרגם לסדר גודל של מספר הפתרונות, והחסם של יעקובי הופך למקרה מסוים – מקרה קשה אך ידוע – של משפט בזו. משפט הגישור הלוגי נותן אפוא הוכחה לחסם במקרה של משוואות הפרש.

מעבר לזיהוין של תורות שלמות ויצירת גשרים ביניהן שואפת תורת המודלים ליצור כלים המאפשרים ניתוח הגאומטרייה של הנוסחאות עצמן. תורת היציבות של שהרן שלח וחלקים אחרים של תורת המיון שלו הגיעו לעומק רב בכיוון זה. שיטות אלה ממשיכות להתפתח ולהאיר מזווית חדשה תחומים גאומטריים כמו משוואות דיפרנציאליות.