

על הילוכים מקריים, על זמני כיסוי ועל שדות עם קורלציה לוגריתמית

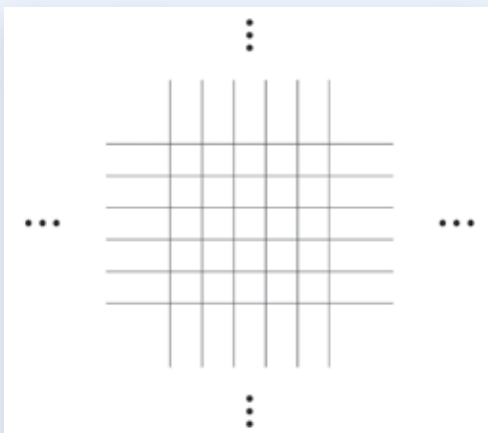


מאת פרופ' עופר זיתוני

על הילוכים מקריים בשריג

ברצוני לקחת אתכם במאמר זה למסע קצר בין כמה עצמים ומודלים הסתברותיים המעסיקים אותי ומתמטיקאים אחרים ושיש להם שימושים רבים גם בפיזיקה, בהנדסה, במדעי המחשב ובתחומים נוספים.

נתחיל את מסענו בשריג הדו-ממדי – כדי להסביר את המושג נתאר לעצמנו את רחובות ושדרות האי מנהטן: הרחובות הם בכיוון מזרח-מערב, והשדרות בכיוון צפון-דרום. נדמיין לעצמנו שהאי הורחב עד לאין קץ, דהיינו שלא רק שקיימת השדרה החמישית, אלא גם השדרה ה-138 וכן השדרה המינוס 257, ובדומה לזה, גם הרחוב המינוס 1499 קיים באי שלנו.



איור 1. מנהטן בעיני מתמטיקאי

האי הזה משעמם למדי, אז נוסיף לו הולכי רגל, ומכיוון שאנו דנים בהסתברות, נרשה להולך הרגל שאחריו נעקוב להשתמש בתנועתו בכללים

ב־1713, מבטיח שבסופו של דבר ההלך ייעלם לכיוון השקיעה, ובנוסף לא מובטח שיחזור לבר. למעשה, ניתן להוכיח כי לא חשוב מהי הטיית הסביבון אם נתעניין רק בתנועה מזרח-מערב ונתעלם מהתנועה בציר צפון-דרום, או שההלך ייעלם לכיוון מערב בהסתברות 1, או שייעלם לכיוון מזרח בהסתברות 1, או שיתנדנד לנצח בין מערב למזרח. נובע מכך כי לא ייתכן שילך מערבה בהסתברות חצי ומזרחה בהסתברות חצי.

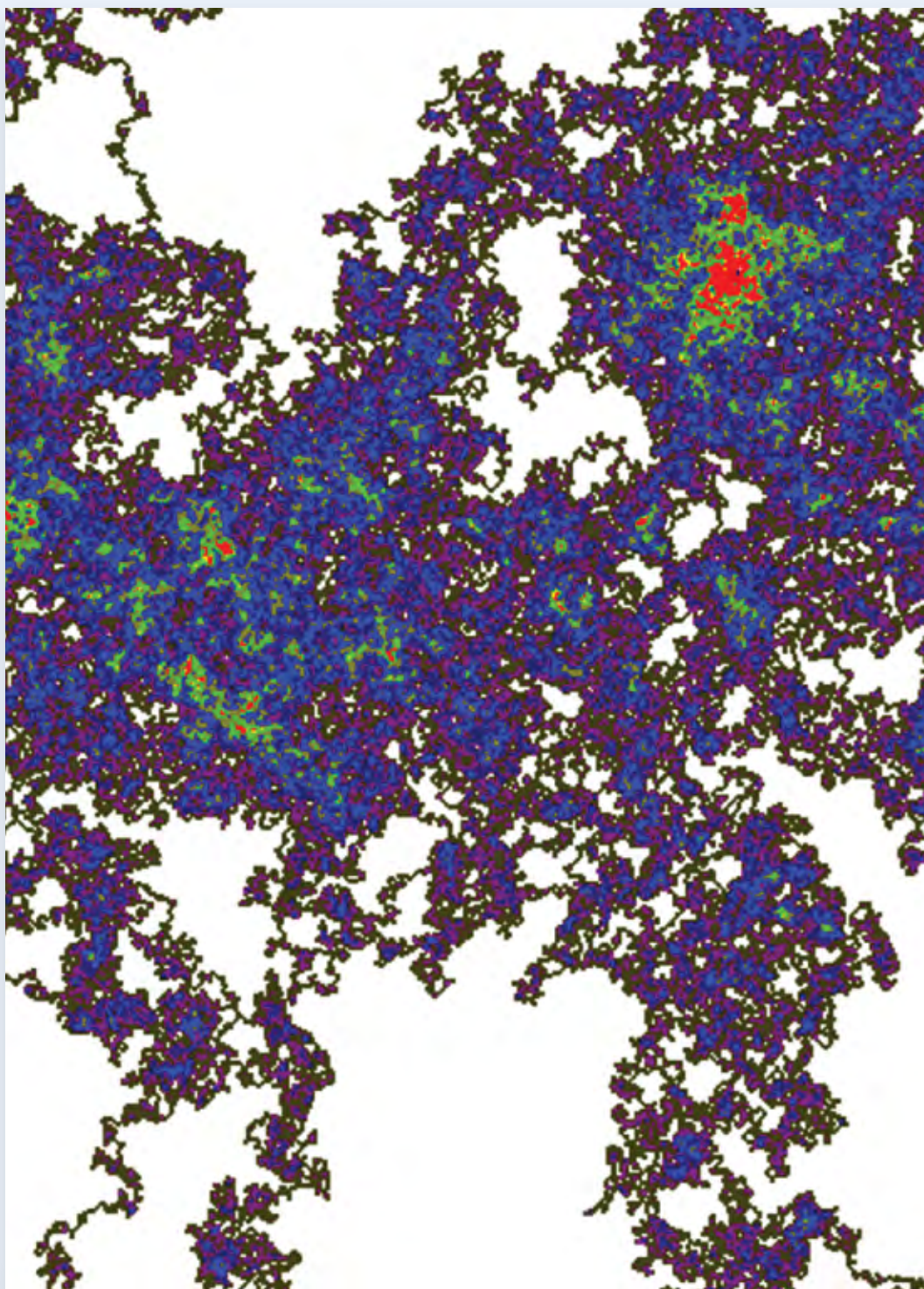
כעת הגיע הזמן לסבך את המודל. נניח שבמקום לשאת איתו את הסביבון, בכל צומת מצוי סביבון אחר שבו ישתמש ההלך כשיגיע לצומת. נניח עוד שסביבונים אלו הם עצמם אקראיים (אנו קוראים למודל כזה "תווך אקראי"). האם עדיין נחזה בהתנהגות זו? מסתבר שכאן אנו נוגעים בתיבת פנדורה של ממש. בשנת 2002 הוכיחו מרקל וצרנר (Merkel and Zerner) כי אם הסביבונים הם בלתי תלויים, אזי (בתלות בסוג הסביבונים הבלתי תלויים שפוזרו, ובלבד שהם אינם מנוונים ונופלים תמיד על אותו כיוון), או שההלך ייעלם לכיוון מערב בהסתברות 1, או שייעלם לכיוון מזרח בהסתברות 1, או שיתנדנד לנצח בין מערב למזרח בהסתברות 1. אבל אם מדובר במרחב התלת־ממדי (כמו הציפורים שאוזכרו למעלה) או בממדים גבוהים יותר, התשובה אינה ידועה, וזו בעיה פתוחה חשובה(!). לעומת זאת, כפי שהוכחתי עם ברמסון ועם צרנר (Bramson, Zeitouni and Zerner) ב־2006, אם נוותר על התנאי של אי־התלות בין הסביבונים השונים, ניתן לייצר תווך (למתמטיקאים ולפיזיקאים שבינינו: סטציונרי, עם ערבוב פולינומיאלי וקורלציות ארוכות טווח) שבו בהסתברות $1/2$ ההלך ייעלם מערבה, ובהסתברות $1/2$ (ובדיוק באותו תווך) הוא ייעלם מזרחה(!). זה נכון הן לנמלים והן לציפורים...



הסתברותיים. דהיינו, בכל פעם שההלך מגיע להצטלבות של רחוב ושדרה, הוא מטיל סביבון בעל ארבעה צדדים (צפון־דרום־מזרח־מערב) שהוא נושא איתו, ולפי התוצאה הוא פונה לכיוון הנבחר (מקובל לקרוא להילוך במקרה שבו ההסתברות של כל אחד מהכיוונים היא רבע – "הילוך שיכור" – או באופן כללי "הילוך מקרי"). אם נצבע את הקטעים שעליהם הלך עד לזמן מסוים, נקבל סוג של ציור, ואם נגביה עוף ונסתכל מרחוק על הציור הזה, הוא ייראה כקשקוש שילד קטן צייר. לקשקוש הזה קוראים "תנועת בראון", על שמו של הבוטניקאי בראון (Brown), שהבחין ב־1828 שכך בדיוק נעים החלקיקים של אבקת פרחים בתוך נוזל. באיור 2 מתואר "קשקוש" שכזה, כאשר קידוד הצבעים משתנה לפי תכיפות הביקור בנקודה.

כעת ניתן להתחיל לשאול שאלות. כדי לנסח את הראשונה שבהן נתאר לעצמנו שבפינת הרחוב ה־ס והשדרה ה־ס מצוי בר. האם מובטח להלך השיכור, שהתחיל את מסעו בבר, לחזור לשם? ודאי שיתכן שהוא יחזור לבר (למשל, אם ההטלה הראשונה נשאה אותו מערבה והשנייה מזרחה; למעשה, הסיכוי לחזור אחרי שני צעדים בדיוק הוא רבע!). הדגש כאן בשאלה הוא במילה "מובטח". ובכן, בשנת 1921 הוכיח מתמטיקאי הונגרי בשם פוליא (Pólya) שהתשובה היא "כן". כדי להראות שהתשובה קצת מפתיעה, הוא גם הוכיח שאילו היה ההלך יכול לצעוד גם מעלה-מטה לפי אותם כללים ("ציפור שיכורה"), אזי התשובה היא "לא"!(!). לנמלים יש הרבה פחות חופש מאשר לציפורים...

משהבנו זאת, ניתן לשאול שאלות נוספות. שאלה בסיסית היא מה קורה אם הסביבון שאותו נושא ההלך מוטה. למשל, אם ההלך מעדיף לצעוד מערבה ולא מזרחה. במקרה זה משפט מתמטי הנקרא חוק המספרים הגדולים, שהוכח לראשונה בידי המתמטיקאי השווייצרי יאקוב ברנולי (Bernoulli)



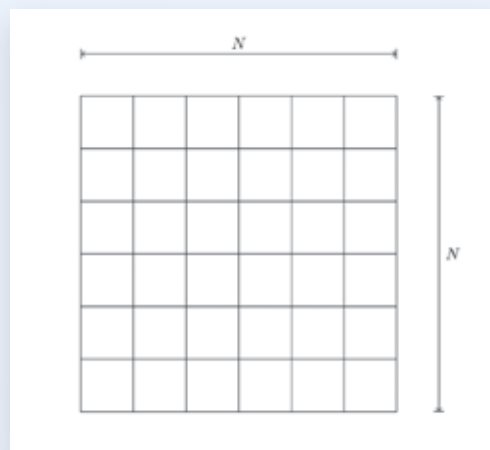
איור 2. תנועת בראון. באדיבות R. d'Souza

שיער ב-1989 שהתשובה לשאלה היא שזמן הכיסוי, מחולק בקבוע $T_N = 4N^2(\log N)^2/\pi$, הוא בקירוב 1, כש- N גדול. את ההשערה הזו הוכחתי עם דמבו, פרס ורוזן (Dembo, Peres, Rosen and Zeitouni) ב-2004, ואיתה עוד כמה וכמה בעיות קשורות, כולל הבנת זמן הכיסוי של צורות (יריעות) דו-ממדיות שונות באמצעות "ניפוח" של תנועת בראון. המפתח להוכחה היא ההבנה שבזמן ארוך מסדר הגודל של T_N לנקודות שעדיין לא בוקרו יש מבנה מיוחד: אם נתבונן ב(שורש) מספר המעברים שההלך ביצע בין מעגלים הממורכזים סביב אותה נקודה כסדרת מספרים התלויה ברדיוס המעגל, אזי סדרה זו היא הילוך מקרי חד-ממדי מוטה, וכל האינפורמציה נמצאת בתלות בין הילוכים כאלו המתאימים לנקודות שונות. תלות זו היא ארוכת טווח, והבנת התלות היא המפתח להוכחה.

למעשה, ההוכחה בנויה על מציאת קשר בין בעיית הכיסוי (או ליתר דיוק, מספרי המעברים שהוזכרו למעלה) למודל של הילוכים מקריים מתפצלים. מודל זה מוגדר כך: בזמן N יש 2^N חלקיקים. כעת כל חלקיק מתפצל לשניים, וכל אחד מהחלקיקים מבצע צעד אקראי ובלתי תלוי. אם נכנה את המקסימום של מיקומי החלקיקים בזמן N בשם Y_N , הרי של- Y_N יש קשר הדוק לשורש זמן הכיסוי. את המודל הזה (או ליתר דיוק, הגרסה הרציפה שלו שהוגדרה באמצעות משוואות דיפרנציאליות חלקיות ללא אזכור מודל הסתברותי) המציאו ב-1937, כמודל לאבולוציה של גנים באוכלוסייה, שתי קבוצות חוקרים: הביולוג והסטטיסטיקאי העיוני הבריטי פישר (Fisher) והמתמטיקאים הרוסים קולמוגורוב, פטרובסקי ופיסקונוב (Kolmogorov, Petrovsky and Piskunov). ראוי לציין כי פישר הוא אחד מאבות הסטטיסטיקה המודרנית, וקולמוגורוב

זמני כיסוי

משראינו שלקורלציות ארוכות טווח יש תפקיד, נעבור למודל שונה, ואולי "מעשי" יותר: הרי האי מנהטן הוא סופי. מה קורה להלך שלנו שם? כדי לתאר זאת במדויק, נתאר לנו שריג ריבועי שיש בו N רחובות ושדרות.



איור 3. שריג סופי דו-ממדי

נצטרך גם להגדיר מה קורה להלך שלנו כשהוא מגיע לקצוות השריג – מסתבר שזה לא ממש חשוב, והמודל הפשוט ביותר הוא כאשר מזהים את הפאה המערבית עם זו המזרחית, ואת הצפונית עם זו הדרומית (כך מקבלים גרף הנקרא טורוס דיסקרטי). כמה זמן ייקח לשיכור שלנו לבקר בכל צומת אפשרי? או במילים אחרות, מהו הזמן הארוך ביותר מתוך זמני הכיסוי של נקודות בשריג? שאלה זו שאל וילף (Wilf) בשנות השמונים, והיא מופיעה בשלל שימושים, ובייחוד בפיזיקה ובמדעי המחשב (תיאור נוסטלגי ומלבב, במיוחד למי שזוכר מחשבים ביתיים בשנים אלו וכמו כן מכיר את "מלחמה ושלום", מופיע במאמר שבו וילף הציג את השאלה בשם The White Screen Problem). אלדוס (Aldous)

אותנו לשאול במקרים רבים, כשאנו נתקלים בבעיה הסתברותית קשה: "ומה אם הפילוג היה גאוס?" לעיתים קרובות גם שאלה זו קשה, אבל לפחות יש קצה חוט שניתן לעקוב אחריו.

דבר דומה קורה בשדות עם קורלציה ארוכת טווח. ראשית נגדיר מהו שדה גאוס. לצרכינו, זוהי פונקציית אקראית מהטורוס הדיסקרטי הדו-ממדי מגודל N שהכרנו בפרק הקודם למספרים הממשיים, שמקיימת את התכונה הזאת: לכל סכום משוקלל (צירוף ליניארי) של ערכי הפונקצייה המתאימים לנקודות שונות בשריג יש פילוג גאוס. שדה כזה מאופיין בשני גדלים: התוחלת (או הממוצע) של הפונקצייה והקורלציה המודדת את הקשר הסטטיסטי בין ערכי הפונקצייה בנקודות שונות. אנו אומרים שלשדה יש קורלציה לוגריתמית אם הקורלציה דועכת לפי הלוגריתם של ההופכי של המרחק בין נקודות. אנו תמיד נתעניין במצב שבו N הוא מספר גדול.

השדה הגאוס הפשוט ביותר המקיים תכונה זו הופיע בפיזיקה בשנות השישים, במסגרת הניסיון לבנות בסיס אקסיומטי לתורת השדות הקוונטיים, ונקרא "השדה הגאוס החופשי" – חופשי מפני שבאינטרפרטציה הפיזיקלית הוא מתאר עולם שבו החלקיקים "חופשיים", דהיינו ללא אינטראקציה הדדית. סימולציה שלו מופיעה באיור 4 (בעמוד הבא).

זה כעשרים שנה שהשדה הגאוס החופשי "מככב" בשאלות שמוצאן בפיזיקה, ובייחוד בתורת השדות הקוונטיים והגרביטציה הקוונטית, מושגים שלא נגדירים כאן. כמה וכמה עבודות של המתמטיקאי הישראלי עודד שרם (Schramm) והמתמטיקאי האמריקאי שפילד (Sheffield) הראו שלשדה הגאוס החופשי הדו-ממדי יש קשר הדוק לתהליך שהמציא שרם בשם "משוואות

הוא אחד מענקי המתמטיקה של המאה העשרים, שבין שאר "מעלליו" נזקפת לזכותו בניית התורה המתמטית של ההסתברות. כמה וכמה מתמטיקאים הראו בשנות השישים והשבעים של המאה הקודמת שהמודל של פישר-קולמוגורוב-פטרובסקי-פסקונוב קשור קשר הדוק לתנועה בראונית. למזלנו, ההבנה של Y_N , המתבססת על האינטרפרטציה ההסתברותית הזו, היא לב תזת הדוקטורט של ברמסון (Bramson) מ-1977. מסתבר כי ניתן להעביר טכניקות ותוצאות מהמודל של הילוכים מקריים מתפצלים לשאלות המעברות שיאים בשדות עם קורלציה ארוכת טווח, ובייחוד לבעיית זמן הכיסוי שבה אנו דנים.

כמובן, זו רק תחילת הסיפור. אם לשאול משפט ממאמרו של וילף, שהוזכר למעלה, כל מתמטיקאי ירצה להבין פרטים מדויקים יותר הנוגעים לזמן הכיסוי (כמו למשל מהי השונות של זמן הכיסוי). לצורך כך אנו נדרשים להבין את השיאים בשדות עם קורלציה ארוכת טווח, מה שמוביל אותנו לתחנה הבאה במסענו.

שדות גאוסיים עם קורלציה לוגריתמית

הפילוג הגאוס הוגדר לראשונה בידי אחד מענקי המתמטיקה בכל הזמנים, גאוס (Gauss), ב-1823, רמזים לפילוג זה הופיעו בעבודות קודמות, של דה־מואבר ולפלאס (De Moivre, Laplace) ואחרים. החשיבות הגדולה בפילוג הגאוס היא כפולה: ראשית, הרבה מערכות (מתמטיות ופיזיקליות) נוטות, מסיבות שניתן להסבירן בעזרת הוכחות מתמטיות במודלים ממושטים, להיות "בקירוב גאוסיות". מכאן גם שמו השני של הפילוג הגאוס – "הפילוג הנורמלי"; שנית, ואולי חשוב לא פחות, בעזרת הפילוג הגאוס ניתן לחשב בקלות יחסית גדלים שונים, מה שקשה לעשות בפילוגים אחרים. שתי סיבות אלו מובילות

אוניברסליות של שיאים

אחת השאיפות במתמטיקה היא מציאת העקרונות המשותפים במבנים שונים, שמלכתחילה לא דווקא נראים קשורים זה לזה. בהקשר שלנו זו תופעת האוניברסליות של שיאים של שדות אקראיים; המתמטיקאי פיזיקאי הבריטי פיודורוב (Fyodorov) היה אחד הראשונים ששיער, לפני כ־15 שנים, את האוניברסליות הזו עבור שדות עם קורלציה לוגריתמית. אתן כעת דוגמאות אחדות שבהן אוניברסליות כזו הוכחה:

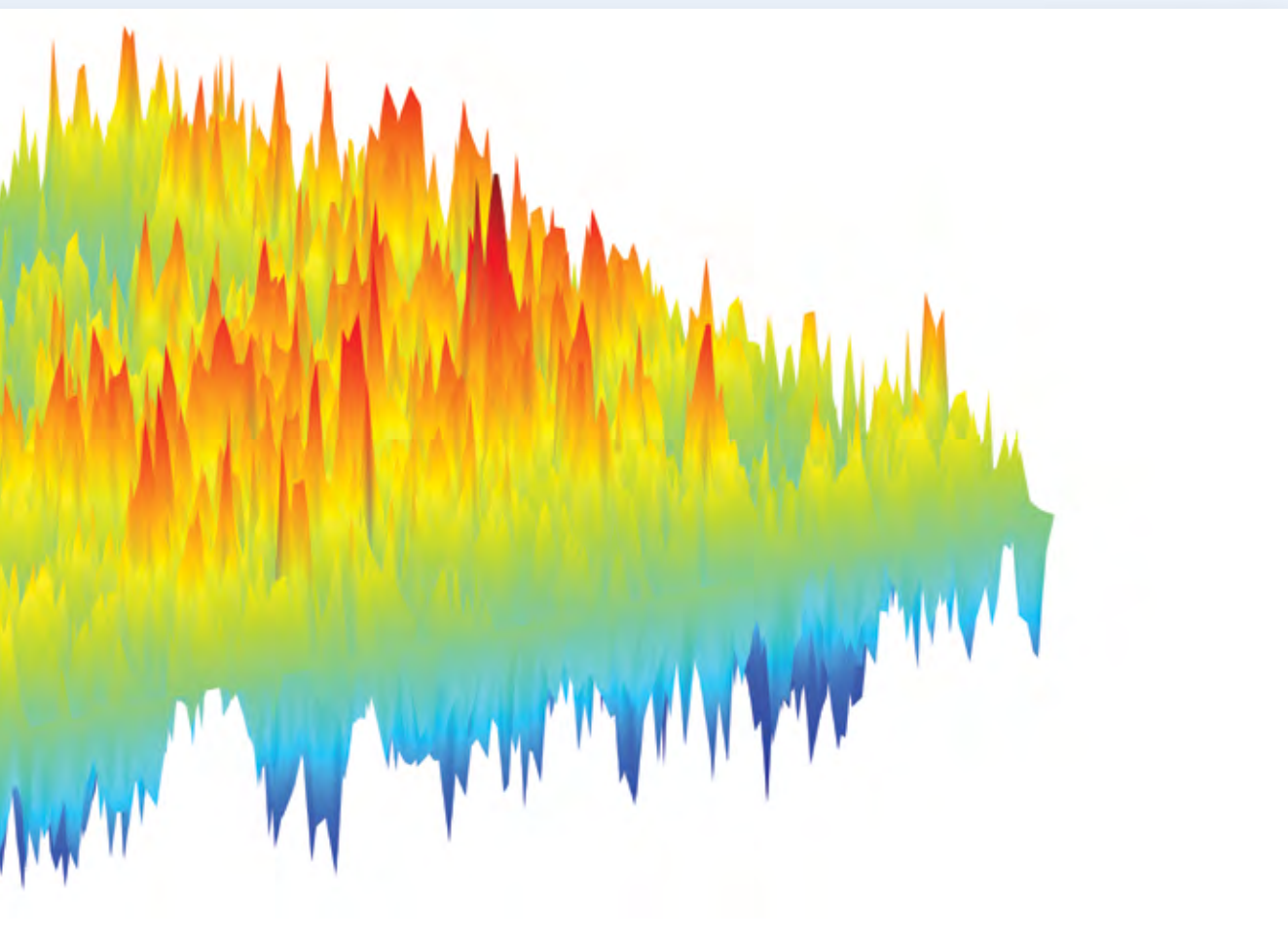
א. ראינו בפרק הקודם שהמקסימום של השדה הגאוסית החופשית, אחרי מרכז מתאים, מתכנס לפילוג ידוע. מסתבר שעובדה זו נכונה לכל שדה גאוסית, ובלבד שהקורלציה לוגריתמית. אם הקורלציה איננה לוגריתמית, הפילוג הגבולי שונה (דינג, רוי וזיתוני; Ding, Roy and Zeitouni 2017).

ב. מטריצות אקראיות הן כר פורה לתופעות אוניברסליות, עם קשרים הדוקים לפיזיקה, להנדסה ולשטחים שונים במתמטיקה, כגון תורת המספרים. אתרכז כאן בדוגמה אחת הקשורה לשיאים: נתבונן במקסימום, על מעגל היחידה, של הלוגריתם של הערך המוחלט של הפולינום האופייני של מטריצה יוניטרית אקראית (מחמת קוצר היריעה אינני מגדיר כאן את כל המושגים). מקסימום זה, לאחר מרכז מתאים, מתכנס לפילוג גבולי, כמו במקרה של השדה הגאוסית החופשית הדו־ממדי (פקט וזיתוני, Paquette and Zeitouni 2022). אנו משערים שהתנהגות דומה קיימת במודלים רבים של מטריצות אקראיות וכן בשאלות בתורת המספרים הקרובות לתורת המטריצות האקראיות.



שרם-לובנר, ועבודות המשך של שפילד עם אחרים הראו שניתן להגדיר במדויק מידות אקראיות על משטחים בעזרת השדה הגאוסית החופשית. במידות אלו, לשיאים של השדה הגאוסית החופשית יש חשיבות רבה. שאלה מעניינת במיוחד היא "מהו המקסימום X_N של השדה החופשית הדו־ממדי". אומנם יש תורה כללית שפיתחו המתמטיקאים פרניק, דדלי וטלגרנד (Fernique, Dudley and Talagrand) בשנות השבעים של המאה הקודמת המטפלת בשיאים של שדות גאוסיים, אך היא אינה נותנת תשובה מדויקת אלא רק סדר גודל. בשנת 2001 מצאו בולטהאוזן, דושל וג'יאקומין (Bolthausen, Deuschel and Giacomin) ש- $X_N/\log N$ קרוב ל- $2\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}$ כש- N גדול, בהסתברות גבוהה. בדיעבד, היום אנו מבינים כי זהו האנלוג של התוצאה של דמבו, פרס, רוזן ושל כתב שורות אלה המוזכרת בפרק השני, אף שבזמנו הקשר לא היה ברור כל כך. בשנת 2016, ובהתבסס על הבנה של המבנה ההיררכי של הקורלציה הלוגריתמית, הוכחתי עם ברמסון ועם דינג (Bramson, Ding and Zeitouni) כי למעשה, אם נחסיר מ- X_N קבוע מפורש שחישבנו, נקבל גודל שמתכנס בהתפלגות, וחישבנו את הפילוג הגבולי. ההוכחה בנויה על מציאת קשר למודל של הילוכים מקריים מתפצלים שהוזכר בפרק הקודם, או במדויק לווריאנט שלו שפיתחתי במשותף עם ברמסון ב־2012. למעשה, הקשר עמוק יותר מהסתכלות רק על המקסימום: כל סדרת הערכים הגבוהים דומה, כפי שתיארו במדויק ביסקופ ולואידור (Biskup and Louidor) ב־2017.

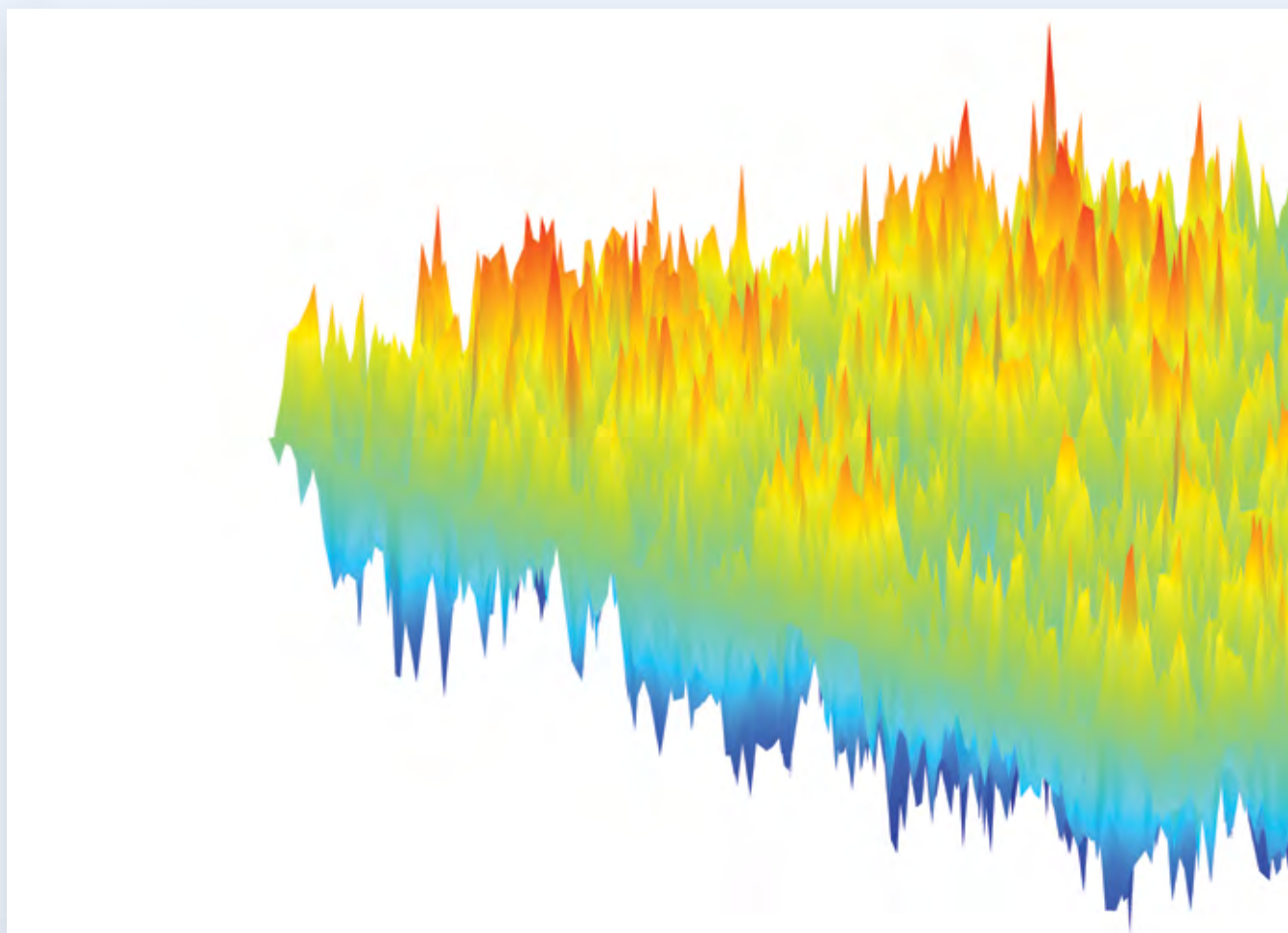
בשנים שעברו מאז התברר שזו תופעה אוניברסלית. המקסימום של שדות אקראיים רבים, לאו דווקא גאוסיים, אחרי נרמול מתאים מתכנסים לפילוג שמצאנו במקרה הגאוסית. בפרק הבא נסקור כמה תוצאות כאלו ונחזור לדון בפרט בזמני כיסוי.



איור 4. השדה הגאומטרי החופשי. באדיבות F. Schweiger

יש דוגמאות נוספות רבות לאוניברסליות זו, בחלקן בצורת השערות ובחלקן מוכחות, אך דיון בהן יחייב אותנו להגדיר מושגים נוספים, ולכן נעצור כאן, אף שלמסע הזה יש תחנות נוספות רבות ומרתקות. בתחנות שבהן עברנו קיבלנו הצצה למקרים שבהם התשובה ידועה וכן לשאלות פתוחות, וראינו שמודל פשוט כמו זה של ההילוך המקרי מוביל לשאלות עמוקות על מבנה של תהליכים עם קורלציה ארוכת טווח (ובפרט לוגריתמית), איך תהליכים כאלו מתקשרים להילוכים מקריים מתפצלים, ואיך כל

ג. שורש זמן הכיסוי של הטורוס הדו-ממדי באמצעות ניפוח של תנועה בראונית מתכנס, לאחר מרכז מתאים, לפילוג גבולי, כמו במקרה של השדה הגאומטרי החופשי הדו-ממדי (דמבו, רוזן וזיתוני; Dembo, Rosen and Zeitouni 2024 [בהכנה]). אנו משערים שתופעה דומה נכונה לכל יריעה דו-ממדית וגם למודל של הלך מקרי על הטורוס הדיסקרטי שהוזכר בפרק השני, אך בזמן הזה עדיין אין הוכחה לכך.



זכאי ז"ל) לשאלות הערכה של ההסתברות של מאורעות נדירים, שבתורן מתקשרות למודלים של פיזיקה מתמטית ולמודלים של תורת ההסתברות שאותם תיארתי. ■

אלו מתקשרים לשדות גאוסיים ולתחומים אחרים במתמטיקה. במידה רבה מסע זה דומה למסלול המקצועי שלי, שהחל מעיסוק בתקשורת ומכ"ם, שהוביל אותי (בהכוונתו של מורי ורבי פרופ' משה

תודות

ברצוני להודות למורי שהחדירו בי את אהבת החקר, לתלמידיי ולשותפיי למחקר על שחלקו איתי את ההתלהבות שבתהליך הגילוי, לחברי האקדמיה שקיבלו אותי לשורותיהם, ולמשפחתי שבלעדיה כל זה היה מהנה הרבה פחות.