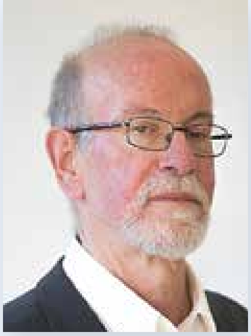
על מעטפות, מערכים, תכנון תנועה ובעיות אֶרְדֶשׁ: העולם הקסום של הגאומטרייה



מאת **פרופ' מיכה שריר**

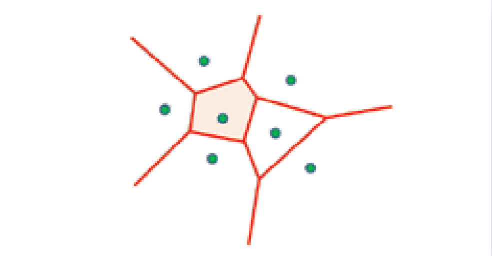
גאומטרייה חישובית וקומבינטורית: הצגת התחום

תחומי המחקר שלי הם **גאומטרייה חישובית וקומבינטורית**, ובעבר גם **תכנון תנועה אלגוריתמי** ברובוטיקה. תחומים אלה עוסקים בבעיות שבהן נתונים הרבה (n) עצמים גאומטריים פשוטים (נקודות, קווים ישרים, עיגולים, משולשים וכו'), ואנו מעוניינים במבנה גאומטרי מסוים שהם מגדירים.

תכונה בולטת של תחומי מחקר אלה היא שרוב הבעיות שהם עוסקים בהן קלות מאוד לניסוח ולהבנה. גם תלמידי תיכון נבונים שאינם בעלי ידע מעמיק במתמטיקה ובמדעי המחשב יוכלו להבין בקלות במה מדובר. לעומת זאת פתרונן של הבעיות בדרך כלל מורכב ומתוחכם, ומספר לא מבוטל של בעיות "תמימות" לכאורה עדיין ממתינות לפתרון, גם אחרי עשרות שנות מחקר מעמיק.

תכונה אחרת של תחומים אלה היא שהבעיות שהם חוקרים באות מן העולם המעשי. אחרי הכול, גאומטרייה היא רכיב מהותי וחשוב בעולם התלת־ממדי שבו אנו חיים, ובעיות גאומטריות צצות בהרבה היבטים של חיינו, הן בתעשייה הן בחיי היום־יום, כמו למשל ראייה, ניווט, רובוטיקה, ייצור ואוטומציה, בסיסי נתונים גאוגרפיים, אבטחה, רשתות תקשורת, וגם בתחומים שבהם הקשר הגאומטרי ברור פחות, כמו למשל ניתוח נתונים סטטיסטיים.

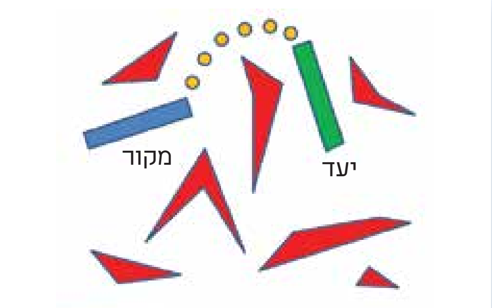
אחת הדוגמאות הוותיקות והמרכזיות בגאומטרייה חישובית וקומבינטורית היא **דיאגרמת וורונוי** (Voronoi Diagram). בדוגמה זו נתונים "סניפי דואר", שהם פשוט נקודות במישור המשרות חלוקה של המישור ל"אזורי השפעה", כשלכל הנקודות באותו אזור אותו סניף דואר הקרוב להן ביותר (ראו איור 1).



איור 1. דיאגרמת וורונוי

בדוגמה מורכבת יותר, שאולי תמחיש את הנקודות שצוינו לעיל, נתונה סביבת עבודה של רובוט (במישור או בתלת־ממד) מלאה מכשולים שמיקומם וצורתם ידועים, ואנו מעוניינים **במרחב המצבים החופשיים** של הרובוט שבהם הוא אינו מתנגש בשום מכשול. נשים לב שלרובוט קשיח (rigid) במישור, למשל, יש שלוש דרגות חופש, שתיים של הזזה ואחת של סיבוב. לכן מרחב המצבים החופשיים של הרובוט הוא תלת־ממדי, והממד של מרחב זה גדל ככל שדרגות החופש של הרובוט רבות יותר.

למעשה, כשנתונים מצב התחלה ומצב יעד של הרובוט, נרצה לדעת אם הרובוט יכול לנוע ביניהם ללא התנגשויות. זהו **תכנון תנועה** (חסרת התנגשויות) ברובוטיקה, תחום מחקר פורה שעסקתי בו רבות בעבר. בסדרת מאמרים שכתבתי עם פרופ' ג'ק שוורץ (Prof. Jack Schwartz) בתחילת שנות השמונים, שכינינו אותם "על בעיית מובילי הפסנתרים", הנחנו את היסודות המתמטיים והאלגוריתמיים של תחום מרתק זה (ראו איור 2).



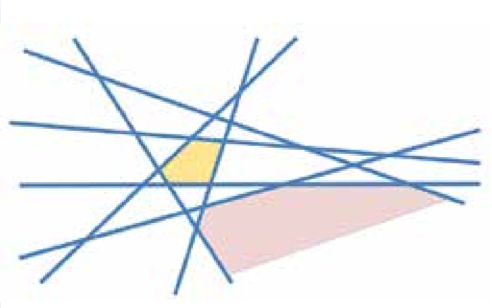
איור 2. תכנון תנועה ברובוטיקה

אנו עוסקים אפוא בגאומטרייה חישובית וקומבינטורית. בגאומטרייה חישובית היעד הוא לתכנן אלגוריתם יעיל לחישוב המבנה המבוקש, ובגאומטרייה קומבינטורית נרצה לדעת מהי סיבוכיות המבנה (כלומר גודלו או כמות המידע הנדרשת לייצוגו, ובלעז: complexity). למשל, מכמה תאים, קודקודים וקשתות מורכבת דיאגרמת וורונוי, ואיך נחשב אותה ביעילות, או מהי סיבוכיות מרחב המצבים החופשיים של הרובוט – איך נחשב מרחב זה ונייצגו ביעילות, ואיך נשתמש במבנה שחישבנו לתכנון מסלול חסר התנגשויות בין זוג מצבים נתונים.

בהרבה מקרים יעילות האלגוריתם תלויה בהערכת הסיבוכיות: ככל שהמבנה "מסובך" יותר, כן הזמן שיידרש לחישובו ולייצוגו רב יותר, ולפעמים הבנת הסיבוכיות של המבנה היא אתגר (כאמור, לרוב קשה) בפני עצמו, עם אלגוריתם או בלעדיו.

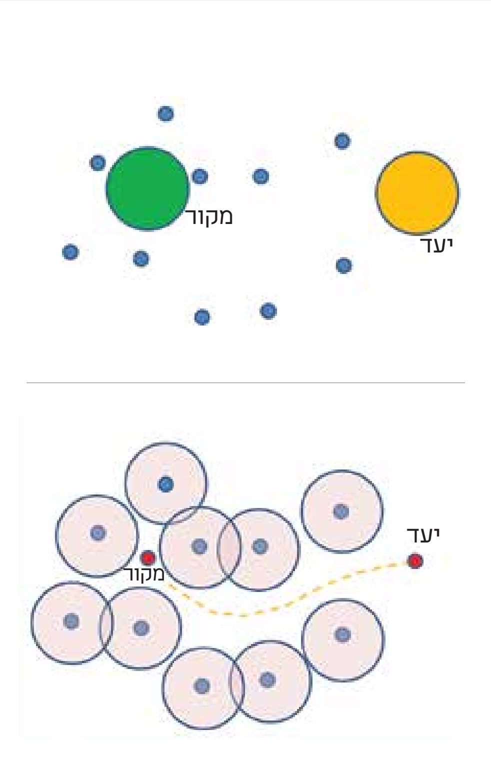
מערכים, חלקי מערכים - ושימושיהם

אחד המושגים הבסיסיים בתחום הוא **מערכים** (arrangements). מערך של עצמים גאומטריים (כגון קווים או עקומים במישור או במישורים או משטחים אחרים בתלת־ממד) הוא חלוקת המרחב לתאים המושרה באמצעות ציור העצמים הללו "זה על גבי זה", כמו למשל מערך הישרים המוצג באיור 3.



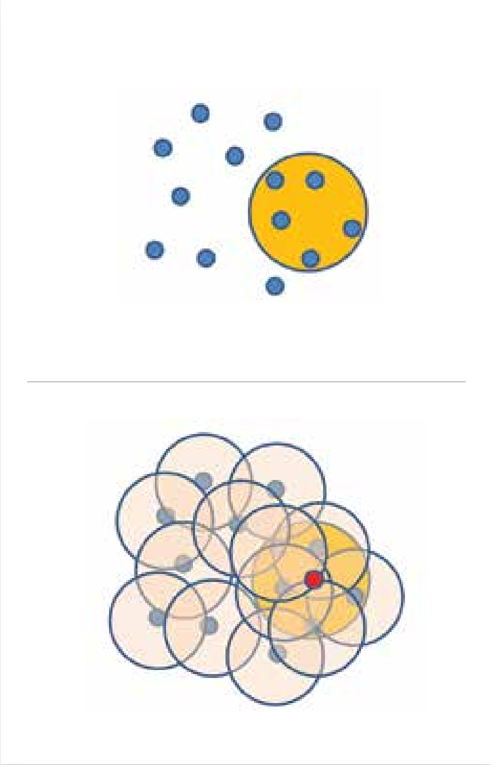
איור 3. מערך של ישרים במישור, עם שני תאים מסומנים

זהו מושג פשוט, אך יש בו הרבה הפתעות. בהרבה יישומים טרנספורמציה של הבעיה מובילה ליצירת מערך, ופתרון הבעיה מתורגם לחישוב, או להערכת הסיבוכיות, של חלק מסוים של המערך. לדוגמה פשוטה נעיין במקרה המיוחד הבא של תכנון תנועה ברובוטיקה, ובו רובוט־עיגול (נאמר ברדיוס 1) צריך לנוע בין מכשולים נקודתיים ("מסמרים") במישור ללא התנגשויות. קל לראות שאם ננפח כל מכשול לעיגול ברדיוס 1 ונכווץ את הרובוט לנקודת מרכזו, אזי הרובוט לא יתנגש בשום מכשול (כלומר לא יכיל שום מכשול) אם, ורק אם, מרכזו מצוי מחוץ לכל עיגולי המכשולים המנופחים. הפתרון הוא אפוא לחשב את איחוד כל עיגולי המכשולים המנופחים ולבדוק אם מרכז מצב ההתחלה ומרכז מצב היעד מצויים שניהם באותו רכיב קשירות של משלים האיחוד, כמודגם באיור 4.



איור 4. שימוש במערך עיגולי המכשולים המנופחים לפתרון בעיית תכנון התנועה

ועוד דוגמה למערך: נתונות n נקודות במישור, ואנו רוצים למצוא עיגול ברדיוס 1 שמכיל מספר מקסימלי של נקודות (חשבו למשל על מיקום אופטימלי של ממטרה שרדיוס ההשקיה שלה נתון שתשקה מספר מרבי של עצים, או לחלופין על תכנון הפצצה שתפגע במספר מרבי של מטרות). אפשר להשתמש באותו רעיון: ננפח כל נקודה לעיגול ברדיוס 1 ונצמצם את העיגול המבוקש לנקודת מרכזו. כעת לעיגול המכיל מספר מרבי של נקודות יש מרכז המוכל במספר מרבי של עיגולים מנופחים. מטרתנו היא אפוא למצוא תא "עמוק" ביותר (מוכל במספר מרבי של עיגולים) במערך העיגולים המנופחים (ראו איור 5).

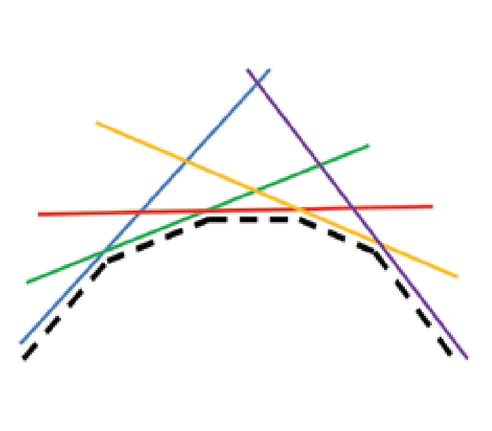


איור 5. מציאת עיגול המכיל מספר מרבי של נקודות שקולה למציאת תא עמוק ביותר במערך העיגולים המנופחים.

בסקירה זו איני עוסק בשאלות האלגוריתמיות הכרוכות בחישוב ובייצוג של המערך כולו או של חלקים ספציפיים שלו (משלים האיחוד, תא עמוק

ביותר וכיו"ב). אלה הן בעיות מרכזיות בתחום, בחלקן הגדול מאתגרות ביותר, שחוקרים רבים וטובים ואנוכי עוסקים בהן זה יותר משלושים שנה, ועוד היד נטויה. אחת המטרות של הסקירה היא להדגים כיצד חקר מערכים מהווה בסיס לשימושים רבים בגאומטרייה חישובית, וגם קומבינטורית.

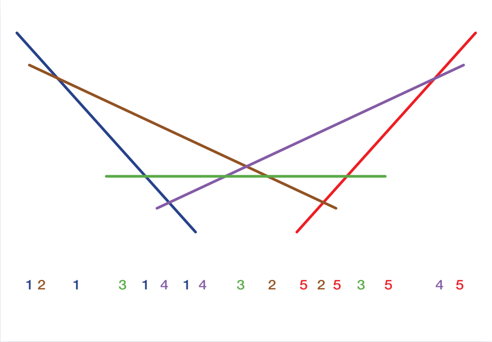
דוגמה נוספת, עיקרית בסקירה זו, היא של **מעטפות תחתונות** של עקומים במישור (ושל משטחים בממדים גבוהים יותר). במקרה הפשוט ביותר נתונים לנו n ישרים במישור. המעטפת התחתונה שלהם היא אוסף חלקי הישרים הנמוכים ביותר, ולחלופין – השפה (העליונה) של התא ה"תחתון ביותר" במערך הישרים. ועוד לחלופין, אם נחשוב על הישרים הללו כעל גרפים של פונקציות ליניאריות (של y כתלות ב־x), המעטפת היא הגרף של המינימום הנקודתי של פונקציות אלה (ראו איור 6).



איור 6. המעטפת התחתונה של n ישרים במישור

נשאלת השאלה מכמה קטעים מורכבת המעטפת (מהי סיבוכיותה). קל לראות שבמקרה זה יש לה לכל היותר n קטעי ישרים, כי הישרים הסמוכים לחלק של ישר המופיע במעטפת מסתירים אותו מהמעטפת מימין ומשמאל, כמודגם באיור, ולכן כל ישר יכול להופיע במעטפת פעם אחת לכל היותר.

ומה קורה במעטפת תחתונה של עקומים אחרים? למשל במעטפת תחתונה של n קטעים ישרים? ראו דוגמה באיור 7.



איור 7. המעטפת התחתונה של n קטעים ישרים במישור

כפי שרואים בעליל, החסם כאן כבר איננו n כמו במקרה של ישרים אלא גדול יותר. עד כמה גדול? קל לראות שכל קטע יכול להיחתך על ידי שאר הקטעים ל־n תתי־קטעים לכל היותר, ולכן ודאי שמספר תתי־הקטעים שעל המעטפת אינו עולה על n^2. האם הוא באמת יכול להיות גדול עד כדי כך?

למעטפות תחתונות שימושים רבים, שכן הן מקודדות את האובייקט הקטן ביותר, או הקרוב ביותר, בכל רגע (x) נתון, וכיצד אובייקט זה משתנה כש־x משתנה. הן מופיעות אפוא במספר רב מאוד של בעיות גאומטריות ואחרות, והבנת הסיבוכיות שלהן היא בעיה מרכזית (וקשה).

מספרים גדולים מאוד: פונקציית אקרמן

לשם הצגת התשובה (המפתיעה למדי) לשאלת הסיבוכיות של מעטפת תחתונה של קטעים (וגם של עקומים, או פונקציות כלליות יותר) עלינו לצאת למסע עוקף קצר, נטול גאומטרייה, שבו נדון **במספרים גדולים מאוד**. ◄

תארו לעצמכם שהגעתם לאי בודד, או לירח, ועליכם לשלוח הביתה, על גלוית דואר, את המספר הגדול ביותר שתוכלו לכתוב. ללא השראה נוספת המספר שתשלחו יהיה מן הסתם מורכב מהרבה מאוד ספרות שבהן תמלאו את הגלויה, כמו למשל:

$$999{,}999{,}999{,}999{,}999{,}999{,}999{,}999{,}999\ldots$$

אבל זה יהיה מספר קטן למדי, כי כתיבת מספר בשיטה העשרונית אינה אלא קיצור דרך לתוכנית מחשב לחישובו, כמו למשל:

$$56789=\Big(\big((5\cdot10+6)\cdot10+7\big)\cdot10+8\Big)\cdot10+9$$

אם כך אולי נכתוב מספר בהרבה כפלים, כמו למשל:

$$9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\ldots$$

אך גם כאן די נישאר מאחור. ואולי הרבה חזקות, כמו למשל:

$$9^{9^{9^{9^{9^{9^{9}}}}}}$$

גם כאן התוצאה קטנה למדי... בכל הניסיונות האלה נפסיד בתחרות, במידה ניכרת, לוִילהלם אקרמן (Wilhelm Ackermann), שבשנת 1928 הגדיר את **פונקציית אקרמן** באמצעות סדרת הפונקציות

$$A_1(n)=2n$$

$$A_2(n)=A_1\Big(A_1\big(\cdots A_1(1)\big)\Big)=2^n$$

$$A_3(n)=A_2\Big(A_2\big(\cdots A_2(1)\big)\Big)=\left.2^{2^{2^{2}}}\right\}\ [\text{פעמים } n]$$

$$A_4(n)=A_3\Big(A_3\big(\cdots A_3(1)\big)\Big)=???$$

וכן הלאה... כלומר כל פונקציה מחושבת באמצעות הפעלת הפונקצייה הקודמת על עצמה n פעמים, החל מהמשתנה 1.

רק הניסיון להגיד (או לדמיין) מהי $A_5(5)$ (ולהבין כמה גדול מספר זה) יכול לגרום לאיבוד חושים, שלא לדבר על $A_{1000}(1000)$. פונקציית אקרמן ה"אמיתית" מוגדרת כאלכסון של הסדרה, כלומר:

$$A(n)=A_n(n)$$

ואין ספק שכך הצלחנו לייצר מספרים גדולים באמת, וקל לכתוב על גבי הגלויה שלנו, בכמה שורות, את תוכנית המחשב לחישובה של הפונקצייה, ואחר כך את הפעלתה, נאמר על המשתנה 1000.

אנו למעשה מעוניינים **בפונקצייה ההופכית** $\alpha(n)$, שערכה הוא ה־k המינימלי שעבורו $A(k)\geq n$. למשל, ניתן להראות ש־

$$A(4)=A_4(4)=2^{2^{2^{\cdots}}}\quad[\text{פעמים } 65{,}536]$$

לכן $\alpha(n)\leq4$ לכל n שניתן להעלות על הדעת. עם זאת בסופו של דבר, $\alpha(n)$ גדלה לאינסוף, אף שזה קורה לאט מאוד מאוד...

ובחזרה למציאות: אקרמן הגדיר את הפונקצייה כמושג מתמטי אבסטרקטי בחקר תורת הפונקציות הרקורסיביות. אבל האם היא (הפונקצייה ההופכית $\alpha(n)$) קיימת ב"טבע"? האם היא קיימת ב"טבע" כמבנה גאומטרי שניתן, עקרונית לפחות, לבנותו בעזרת מסור, פטיש, מקלות ומסמרים? למרבה הפלא התשובה חיובית: הפונקצייה ההופכית מופיעה בסיבוכיות המעטפת התחתונה של קטעים במישור.

מעטפת תחתונה של קטעים

נחזור לאיור 7, המדגים מעטפת תחתונה של חמישה קטעים. נתרגם את בעיית המעטפת לבעיה הקומבינטורית הבאה: נלך מתחת לקטעים, משמאל לימין, ונכתוב את סדרת הקטעים שאנו רואים (בכל רגע, הקטע הנמוך ביותר).

בדוגמה שבאיור מתקבלת הסדרה:

1 2 1 3 1 4 1 4 3 2 5 2 5 3 5 4 5

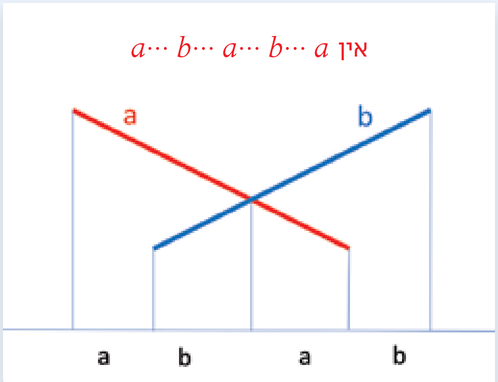
שנקרא לה **סדרת המעטפת**. נשים לב שהסדרה מקיימת את התכונות הפשוטות האלה:
ראשית, כאשר נתונים לנו n קטעים, הסדרה מורכבת מהסמלים $1,2,\ldots,n$.
שנית, אין בה שני סמלים זהים עוקבים (כי הסמל הבא יהיה תמיד של קטע חדש המופיע על המעטפת).
שלישית (התכונה החשובה ביותר), אין בה תת־סדרה מתחלפת באורך 5, מהצורה

$$a\cdots b\cdots a\cdots b\cdots a$$

הסיבה לכך, המודגמת באיור 8, היא שבמקרה ה"גרוע ביותר" (כמו שנהוג לומר במקצוע...) שני הקטעים a ו־b יכולים להופיע על המעטפת לכל היותר בצורה המתחלפת $a\cdots b\cdots a\cdots b$, כמו באיור, אך לאחר מכן (ימינה יותר) כבר לא נוכל לראות את a על המעטפת.

סדרה שמקיימת שלוש תכונות אלה נקראת **סדרת דוונפורט–שינצל** (מסדר 3) או Davenport–Schinzel sequence.

מה האורך המרבי של סדרה כזו? כפי שהוכחנו בשנות השמונים (עם שיפורים בקבוע הכפלי שהתקבלו במהלך השנים), האורך הוא לכל היותר $2n\alpha(n)$.



איור 8. סדרת המעטפת של קטעים אינה יכולה להכיל תת־סדרה מתחלפת באורך 5 של שני קטעים.

זהו חסם כללי, המתייחס לכל סדרה שמקיימת את שלוש התכונות ומתעלם מ"מוצאן" של הסדרות שלנו כסדרות מעטפת של קטעים. אולם כפי שהראינו בעבודה מאוחרת יותר, ניתן לבנות אוסף של קטעים (ישרים) שסדרת המעטפת שלהם תהיה באורך $\frac{1}{2}n\alpha(n)$ לפחות.

זוהי תוצאה משונה: האורך המרבי כמעט ליניארי (כלומר פרופורציונלי למספר הקטעים), אבל רק כמעט... ניסיונות רבים נעשו להוכיח חסם ליניארי על אורך הסדרה לפני שקיבלנו את החסמים שלנו, אך כמובן הם לא הצליחו. מכל מקום, החשש שהעלינו קודם, שסיבוכיות המעטפת היא אולי ריבועית במספר הקטעים, התבדה, לשמחתנו.

חסמים דומים קיימים למעטפות תחתונות של פונקציות אחרות (במקום קטעים). בכל מקרה אורך הסדרה המרבי כמעט ליניארי במספר הפונקציות, עם גורם כפלי התלוי בפונקציית אקרמן ההופכית ובסוג הפונקציות הרלוונטיות.

לדוגמה, סיבוכיות המעטפת התחתונה של n קשתות מעגליות היא לכל היותר פרופורציונלית ◄

ל-$n\cdot 2^{\alpha(n)}$ (שלא כבמקרה של קטעים ישרים, כאן אין לנו מושג אם חסם זה אומנם יכול להתקבל עבור סדרת מעטפת של קשתות מעגליות).[1]

את הסדרות המציאו הארולד דוונפורט ואנדריי שינצל (Harold Davenport and Andrzej Schinzel) בשנות השישים, אך הרלוונטיות שלהן לבעיות גאומטריות התגלתה רק בתחילת שנות השמונים. את החסמים (עבור המקרה של קטעים) קיבלנו, עם פרופ' סרג'יו הרט, באמצע שנות השמונים.

העובדה שסדרות אלה "מקודדות" את הסיבוכיות של מעטפות תחתונות הובילה לשימושים רבים ומגוונים שלהן באלפי מחקרים בגאומטרייה, בתכנון תנועה ברובוטיקה, באופטימיזציה, בקומבינטוריקה ועוד ועוד. 2,530 מחקרים לפחות השתמשו בסדרות אלה, לפי Google Scholar, ועוד היד נטויה.

דוגמה אחת להופעת הסדרות לקוחה מתכנון תנועה ברובוטיקה. נעיין במקרה שבו מקל (כלומר קטע ישר) נע במישור (באמצעות הזזה וסיבוב) בין מכשולים נתונים, כשכל מכשול הוא קטע. כרגיל, מטרתנו היא להניע את המקל ממצב התחלה נתון למצב יעד מבוקש מבלי שיתנגש במכשולים. כבעיה כללית יותר, נרצה לחשב ולייצג את מרחב כל המצבים החופשיים של המקל. נשים לב שזהו מרחב תלת־ממדי, שכן לכל מיקום של המקל יש שלוש דרגות חופש – שתיים של הזזה ואחת של סיבוב.

אינטואיטיבית, נקודות הקיצון של מרחב המצבים החופשיים הן מצבים שבהם המקל "תקוע", כלומר נמצא במצב חופשי אך נוגע בשלושה מכשולים, כמודגם באיור 9.

איור 9. מצב חופשי קיצוני של מקל בין מכשולים

כפי שניתן להראות, אם נחסום את מספר המצבים ה"תקועים", נקבל חסם על סיבוכיות מרחב המצבים החופשיים.

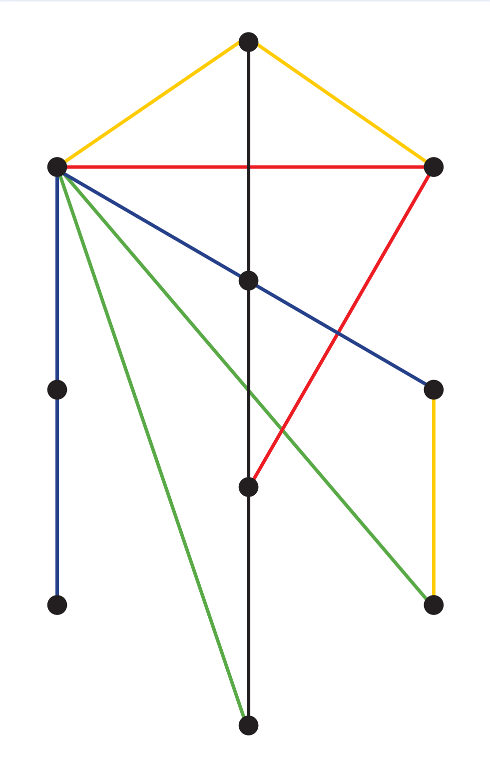
היות שכל מצב תקוע תלוי בשלושה מכשולים, קל לראות שחסם נאיבי על מספר מצבים אלה הוא פרופורציונלי ל-n^3. ניתוח מעמיק יותר של הבעיה מוביל לחסם משופר, הפרופורציונלי ל-n^2 כפול גורם שתלוי ב-$\alpha(n)$. הסיבה היא שכשהמקל נע סביב פינה קבועה (מסתובב סביבה ומחליק דרכה), מתקבל צירוף של שתי מעטפות תחתונות: המכשול הראשון שראש המקל פוגע בו והמכשול הראשון שזנבו פוגע בו. סיבוכיות כל מעטפת, וכן סיבוכיות הצירוף שלהן, חסומות על ידי ביטוי שבו מופיעה פונקציית אקרמן ההופכית.

1) למתעניינים, נסו להוכיח שאם נדרוש רק שבסדרה אין תת־סדרה מתחלפת באורך 4 (כלומר אין $a\cdots b\cdots a\cdots b$), אזי אורכה המרבי הוא רק $2n$-1. סדרת המעטפת התחתונה של פרבולות מקיימת תכונה זו.

בעיות ארדש (על קצה המזלג)

ולקינוח, תחום מחקר מעט שונה בגאומטרייה קומבינטורית העוסק ב"בעיות ארדש". פאול ארדש (Paul Erdős), מתמטיקאי הונגרי יהודי שחי בשנים 1996–1913, היה ללא ספק המתמטיקאי הפורה ביותר אי פעם (פרסם כ־1,500 מאמרים) ואחד המתמטיקאים הבולטים של המאה העשרים. היו לו תולדות חיים מיוחדות במינן, שתקצר היריעה מלפרטן כאן (למתעניינים, נכתבו עליו שני ספרים וגם הופק סרט). ארדש השפיע על תחומים רבים במתמטיקה, ובהם גאומטרייה קומבינטורית.

ארדש הציג, במאמר קצר ב־1946, שתי בעיות קשות, אחת עדיין ממתינה לפתרון (זוהי **בעיית המרחקים החוזרים** – ראו בהמשך), והשנייה כמעט נפתרה.

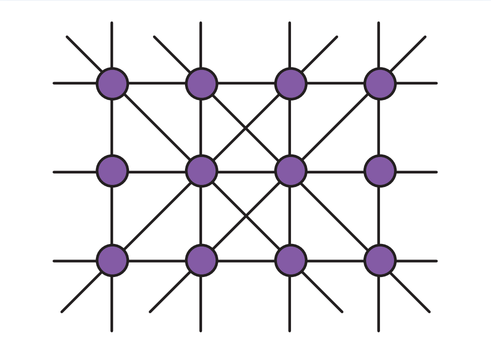


איור 10. קבוצה בת עשר נקודות במישור המגדירה רק חמישה מרחקים שונים במקום המקסימום האפשרי – 45

הבעיה שכמעט נפתרה היא **בעיית המרחקים השונים** (ראו לדוגמה איור 10): כשנתונה קבוצה כלשהי של n נקודות במישור, כמה מרחקים שונים לפחות חייבים להיות ביניהן?

ארדש שיער שמספר המרחקים השונים הוא תמיד לפחות כמעט ליניארי במספר הנקודות, וליתר דיוק לפחות פרופורציונלי ל־$\frac{n}{\sqrt{\log n}}$ (ויש דוגמאות לקבוצות נקודות שבהן זהו אומנם מספר המרחקים השונים). השערתו כמעט הוכחה בידי לארי גות' ונטס הוק כץ (Larry Guth and Nets Hawk Katz) ב־2010 (נותר פער זעיר בין החסם העליון של ארדש, כמצוין לעיל, ובין החסם התחתון של גות' וכץ, שהוא פרופורציונלי ל־$\frac{n}{\log n}$). גות' וכץ השתמשו ברעיונות של גיורי אלקש (Gyuri Elekes), מתמטיקאי הונגרי שנפטר ב־2008, מעט לפני ההתפתחויות החדשות (רעיונות שעזרתי בפרסומם לאחר פטירתו), וכן השתמשו בטכניקות מגאומטרייה אלגברית, תחום מתמטי שמלכתחילה לא נראה קשור כלל לבעיה.

הרעיון המרכזי של אלקש היה לתרגם את בעיית המרחקים השונים במישור לבעיית **חילות** (incidences) בין נקודות לישרים בתלת־ממד (חילה בין נקודה לישר היא דרך אחרת לומר שהנקודה נמצאת על הישר; ראו איור 11), מה



איור 11. חילות בין נקודות וישרים במישור

שהצית מחדש, בעשור האחרון, את העניין בתורת החילות, תחום מחקר אינטנסיבי, "דמוי ארדש", בגאומטרייה קומבינטורית. זהו תחום שעסקתי בו רבות, הן לפני פריצות הדרך של אלקש, גות' וכץ הן בעשור האחרון, לאחריהן.

דוגמה לסוג הבעיות שבהן עסקתי היא עבודה משותפת שלי עם אדם שפר ויוז'ף שוימושי (Adam Sheffer and Jozsef Solymosi), שחקרה את הווריאציה הבאה של בעיית המרחקים השונים: נתונים שני ישרים במישור, ועל כל אחד n נקודות. כמה מרחקים שונים לפחות יש בין שתי הקבוצות? לא קשה להראות שאם הישרים מקבילים או מאונכים, אפשר למקם n נקודות על כל אחד מהם כך שמספר המרחקים השונים בין הקבוצות הוא רק ליניארי ב־n. אך הראינו שאם הישרים אינם מקבילים ואינם מאונכים, אזי מספר המרחקים השונים הוא לפחות פרופורציונלי ל־$n^{4/3}$.

עבודה זו הובילה לעבודות נוספות שבהן נחקרו וריאציות אחרות של בעיית המרחקים השונים, כמו מספר המרחקים השונים בקבוצת נקודות המצויה על עקום, גם בממדים גבוהים יותר. בעת הזאת הבעיה הפתוחה המאתגרת היא קבלת חסם תחתון הדוק על מספר המרחקים השונים בקבוצה כלשהי של n נקודות בשלושה ממדים, כשהמטרה היא להוכיח שחסם זה הוא תמיד לפחות פרופורציונלי ל־$n^{2/3}$. זה יהיה חסם הדוק, כי דוגמה פשוטה המבוססת על שריג תלת־ממדי נותנת קבוצה שבה מספר המרחקים השונים אינו עולה על חסם זה. אף שגרסה זו של הבעיה נראית קשה במיוחד, היא כנראה קלה מבעיית המרחקים החוזרים של ארדש (כפי שהוצגה במאמרו מ־1946) והיא לחסום את המספר המרבי של זוגות נקודות בקבוצה בת n נקודות במישור עם אותו מרחק ביניהן (למשל במרחק 1 זו מזו). למרות פריצת דרך מסוימת בשנות השמונים הבעיה עדיין פתוחה, וישועה לא נראית באופק.

מבלי להיכנס להיבטים הטכניים של הוכחות התוצאות החדשות, אציין רק שתוצאות אלה נחשבו לקשות במיוחד להשגה, ללא סיכוי של ממש לקבלן "במהלך חיינו", וזאת לפני שהשיטות האלגבריות של גות' וכץ ואחרים הוכנסו לשימוש. ההתפתחות שחלה בתחום בעשור האחרון היא לא פחות ממהפכה משמחת.

לסיכום

הבעיות שנזכרו בסקירה זו הן רק קצה הקרחון של התחום, שרגלו האחת ניצבת על שיטות מתמטיות ואלגוריתמיות מורכבות, ורגלו השנייה נוגעת ביישומים מגוונים מהעולם המעשי.

אני שמח על שניתנה לי הזכות להיות שותף לתחום זה ומקווה שהסקירה גירתה את דמיונם של חלק מהקוראים, ושהם חולקים עימי את ההתרשמות מהיופי והקסם שבתחום. אם כך, והיה זה שכרי מכל עמלי. ■

תודות: תקצר היריעה מלהודות למספר רב מאוד של שותפים לדרך שתרמו את כישרונם ומרצם לעבודות המשותפות. אך במיוחד אני מודה לתלמידיי הרבים, שעזרו לי להגיע עד הלום. אני מוקיר את הכישרון, היצירתיות, העמל הרב וההתלהבות שלהם וגאה לראות חלק גדול מהם פורחים ומשגשגים באקדמיה ובמחקר, בארץ ובעולם.

References

P. Erdős, On sets of distances of n points, *Amer. Math. Monthly 53* (1946), 248–250.

L. Guth and N.H. Katz, On the Erdős distinct distances problem in the plane, *Annals Math. 181* (2015), 155–190. Also in arXiv:1011.4105.

S. Hart and M. Sharir, Nonlinearity of Davenport–Schinzel sequences and of generalized path compression schemes, *Combinatorica 6* (2) (1986), 151–177.

D. Leven and M. Sharir, An efficient and simple motion planning algorithm for a ladder moving in 2-dimensional space amidst polygonal barriers, *J. Algorithms 8* (1987), 192–215.

J.T. Schwartz and M. Sharir, On the Piano Movers' problem: I. The case of a rigid polygonal body moving amidst polygonal barriers, *Commun. Pure Appl. Math. 36* (1983), 345–398.

J.T. Schwartz and M. Sharir, On the Piano Movers' problem: II. General techniques for computing topological properties of real algebraic manifolds, *Advances Appl. Math. 4* (1983), 298–351.

M. Sharir and P.K. Agarwal, *Davenport–Schinzel Sequences and Their Geometric Applications,* Cambridge University Press, Cambridge - New York - Melbourne, 1995.

M. Sharir, A. Sheffer and J. Solymosi, Distinct distances on two lines, *J. Combinat. Theory,* Ser. A 120 (2013), 1732–1736. Also in arXiv:1302.3081.

A. Wiernik and M. Sharir, Planar realization of nonlinear Davenport–Schinzel sequences by segments, *Discrete Comput. Geom. 3* (1988), 15–47.